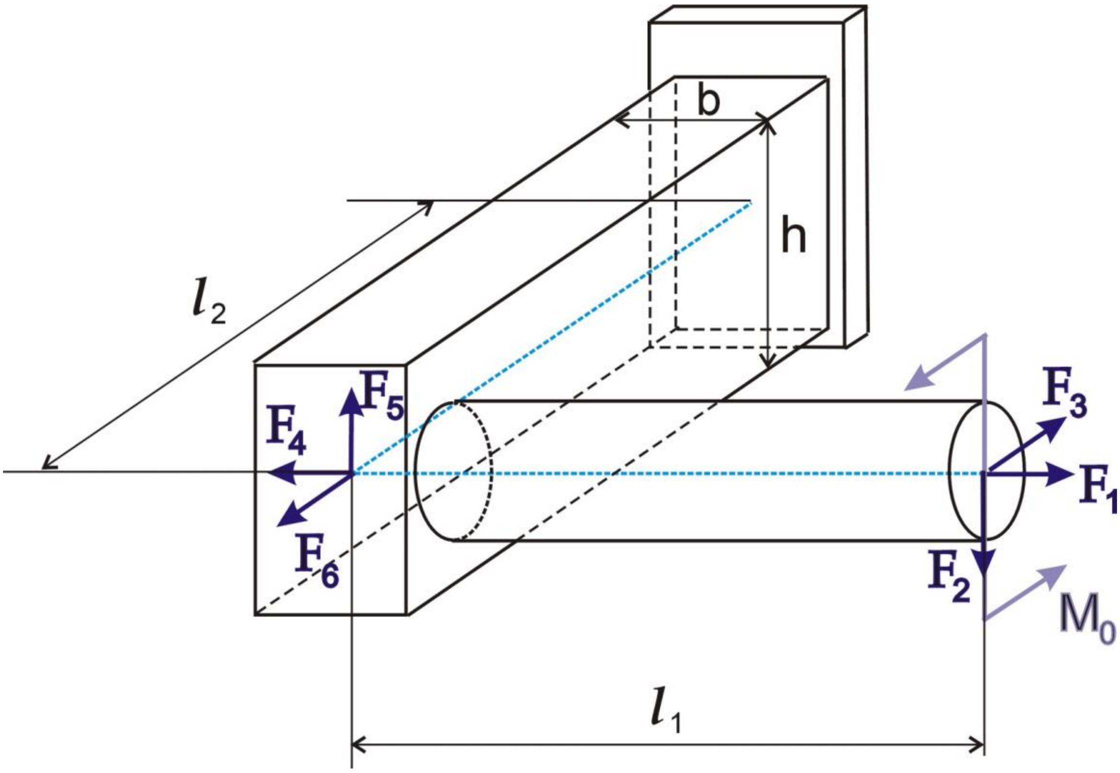
Расчет коленчатого стержня



На рисунке показан коленчатый стержень, состоящий из двух участков. Сечения участков имеют разную форму: на первом участке круглое, на втором – прямоугольное. Одним концом стержень жестко защемлен.

Заданы длины участков $l_1 = 2\ м$, $l_2 = 3\ м$ и внешние активные силы, действующие на стержень:

$M_0 = 50\ КНм$, $F_1 = 100\ кН$, $F_2 = 20\ кН$, $F_3 = 30\ кН$,

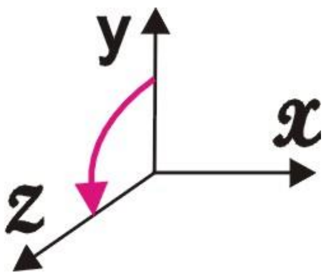
$F_4 = 40\ кН$, $F_5 = 80\ кН$, $F_6 = 150\ кН$.

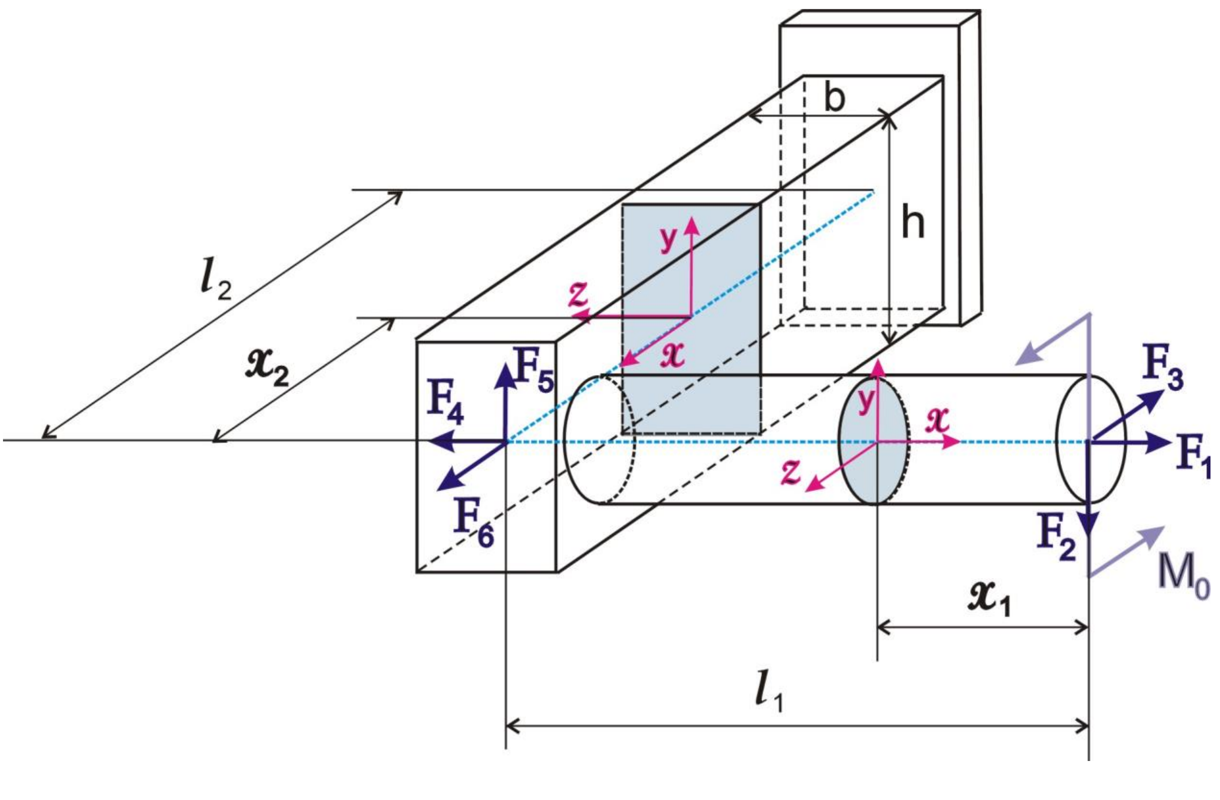
Длины участков и точки приложения сил задаются на осях стержней, т.е. не используются размеры поперечных сечений.

Требуется подобрать размеры сечений из условия прочности ($[\sigma] = 160\ МПа$) и определить перемещение свободного конца стержня в направлении силы F_3.

Сначала построим эпюры внутренних усилий на участках стержня. В пространственном случае, как известно, имеется шесть внутренних усилий (N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z), однако мы ограничимся четырьмя (N_x, M_x, M_y, M_z), поскольку поперечные силы Q_y, Q_z и связанные с ними касательные напряжения в данном случае не оказывают существенного влияния на прочность и не вносят заметного вклада в потенциальную энергию деформации, то есть в перемещения.

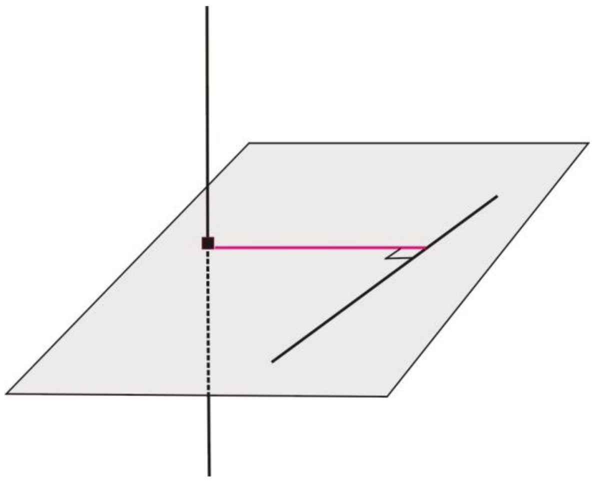
Для построения эпюр по алгоритму метода сечений выберем на каждом участке произвольное сечение. Их положение определяется расстояниями от концов участков, эти расстояния обозначим x_1 и x_2 соответственно. С каждым сечением свяжем локальную систему координат x, y, z. Ось x этой системы будем направлять всегда вдоль оси стержня на данном участке к свободному концу стержня, а оси y и z будут лежать в плоскости поперечного сечения, образуя вместе с осью x так называемую *правую тройку* (это значит, что, например, с конца оси x поворот от оси y к оси z виден против часовой стрелки).





При построении эпюр будем руководствоваться следующим **правилом знаков**, справедливым для правого конца стержня: усилие (сила или момент, рассматриваемый как вектор) положительно, если совпадает по направлению с одноименной осью. Для момента это означает, что создающая его сила или пара с конца соответствующей оси видна вращающейся против часовой стрелки. Например, на первом участке $M_x = +M_0$.

При определении моментов сил следует также помнить, что момент относительно оси создает та сила, которая не пересекает эту ось и ей не параллельна. Такие прямые в геометрии называются *скрещивающимися*. Прямые являются скрещивающимися, если одна из них лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость, то есть имеет с ней одну общую точку. Расстоянием между скрещивающимися прямыми является длина перпендикуляра, опущенного из этой точки в плоскости на вторую прямую. Именно это расстояние и будет плечом силы относительно оси в пространстве.



Запишем выражения для внутренних усилий, находя их каждый раз как алгебраическую сумму соответствующих внешних сил или их моментов, взятых со знаками по правилу знаков. Рассматривать при этом будем силы, приложенные к части стержня, включающей его свободный конец. Это избавляет нас от необходимости находить реактивные силы и моменты в жестком защемлении.

1) $0 \le x_1 \le l_1 = 2\ м$: $N_x = F_1 = 100\,(кН)$, $M_x = M_0 = 50\,(кНм)$;

$M_y(x_1) = F_3 \cdot x_1 = 30x_1$, $M_y(0) = 0$, $M_y(2) = 60\ (кНм)$;

$M_z(x_1) = -F_2 \cdot x_1 = -20x_1$, $M_z(0) = 0$, $M_z(2) = -40\ (кНм)$.

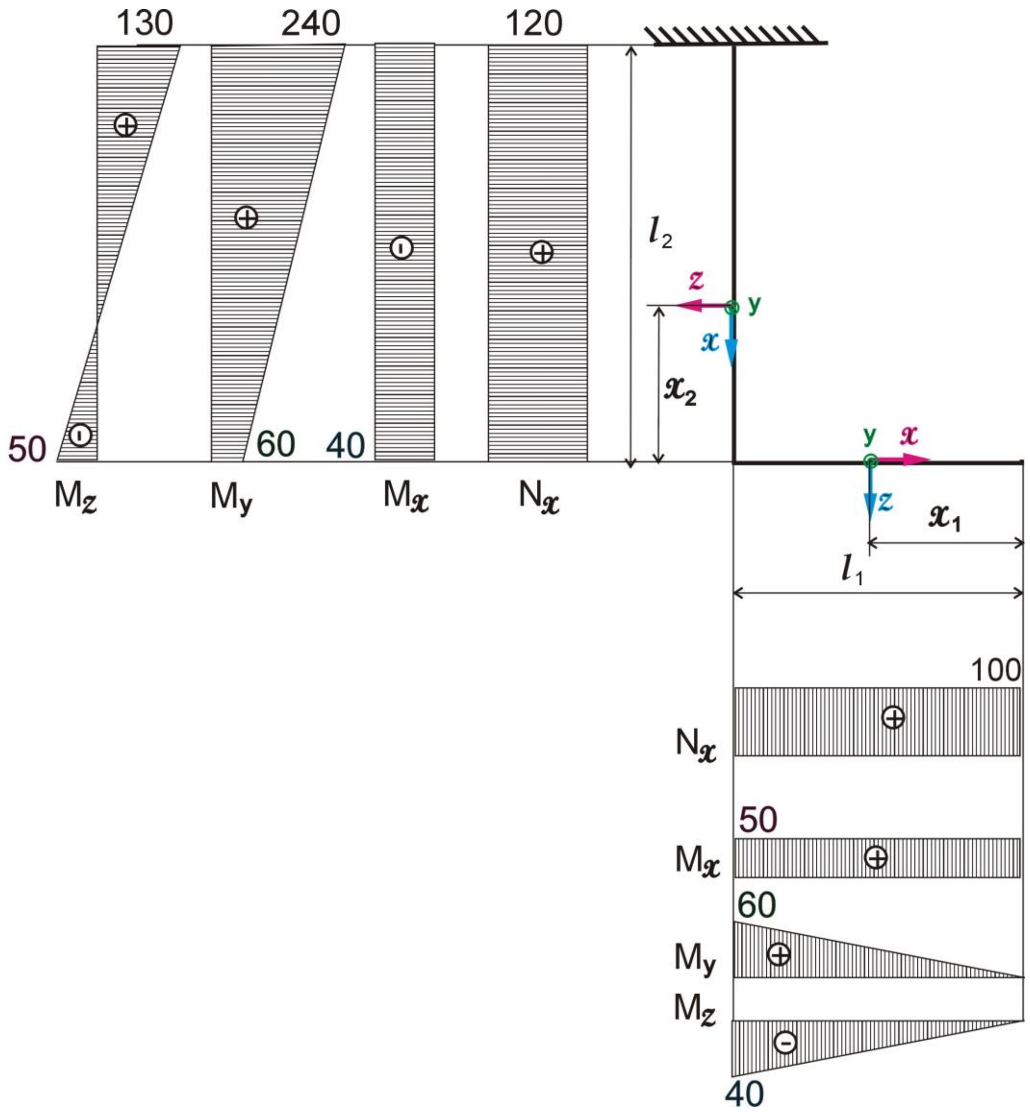
2) $0 \le x_2 \le l_2 = 3\ м$: $N_x = F_6 - F_3 = 120\,(кН)$, $M_x = -F_2 l_1 = -40\,(кНм)$;

$M_y(x_2) = (F_1 - F_4) \cdot x_2 + F_3 l_1 = 60 + 60x_2$,

$M_y(0) = 60\,(кНм)$, $M_y(3) = 240\ (кНм)$;

$M_z(x_2) = -M_0 + (F_5 - F_2) \cdot x_2 = -50 + 60x_2$,

$M_z(0) = -50\,(кНм)$, $M_z(2) = 130\ (кНм)$.



Построим эпюры на линиях отсчета, параллельных соответствующим участкам стержня. Для контроля правильности эпюр можно использовать равновесие узла, в котором соединяются участки. Например, как видно из рисунка, $M_x(x_1 = l_1) = -M_z(x_2 = 0) = 50\,(кНм)$, поскольку ось x на первом участке направлена противоположно оси z для второго участка. Оси y для первого и второго участков совпадают, поэтому $M_y(x_1 = l_1) = M_y(x_2 = 0) = 60\,(кНм)$.

Аналогично, $M_z(x_1 = l_1) = M_x(x_2) = -40\,(кНм)$, потому что ось z на первом участке сонаправлена оси x на втором участке.

Для определения перемещения в направлении силы F_3 целесообразно применить теорему Кастильяно:

$$\delta_{F_3} = \frac{\partial U}{\partial F_3} = \sum_{i=1}^{2} (\int_{l_i} \frac{N_x}{EA} \cdot \frac{\partial N_x}{\partial F_3} dx + \int_{l_i} \frac{M_x}{GI_p} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial F_3} dx +$$

$$+ \int_{l_i} \frac{M_y}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial F_3} dx + \int_{l_i} \frac{M_z}{EI_z} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial F_3} dx)$$

Здесь из шести интегралов, соответствующих наиболее общему случаю пространственного нагружения, используются только четыре, а двумя интегралами, отвечающими потенциальной энергии сдвига, пренебрегают. Как правило, первый интеграл, учитывающий потенциальную энергию растяжения-сжатия, также пренебрежимо мал по сравнению с остальными. Воспользуемся ранее записанными выражениями внутренних усилий и возьмем производные:

1) $0 \le x_1 \le l_1 = 2\ м$: $N_x = F_1 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial F_3} = 0$, $M_x = M_0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial F_3} = 0$;

$$M_y(x_1) = F_3 \cdot x_1 \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial F_3} = x_1,\ M_z(x_1) = -F_2 \cdot x_1 \Rightarrow \frac{\partial M_z}{\partial F_3} = 0.$$

2) $0 \le x_2 \le l_2 = 3\ м$: $N_x = F_6 - F_3 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial F_3} = -1$, $M_x = -F_2 l_1 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial F_3} = 0$;

$$M_y(x_2) = (F_1 - F_4) \cdot x_2 + F_3 l_1 \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial F_3} = l_1,$$

$$M_z(x_2) = -M_0 + (F_5 - F_2) \cdot x_2 \Rightarrow \frac{\partial M_z}{\partial F_3} = 0.$$

Следовательно

$$\delta_{F_3} = \int_0^{l_1} \frac{30x_1 \cdot x_1}{EI_{y1}} dx_1 + \int_0^{l_2} \frac{120 \cdot (-1)}{EA_2} dx_2 + \int_0^{l_2} \frac{(60 + 60x_2) \cdot 2}{EI_{y2}} dx_2 =$$

$$= \frac{10 l_1^3}{EI_{y1}} - \frac{120 l_2}{EA_2} + \frac{120 l_2 (1 + 0.5 l_2)}{EI_{y2}}$$

Чтобы вычислить перемещение δ_{F_3}, необходимы значения геометрических характеристик сечений, поэтому подсчеты будут произведены позднее, когда из условий прочности будут определены размеры сечений.